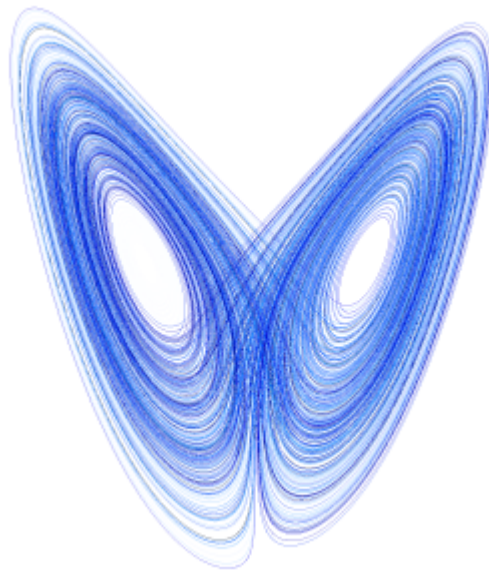


Wettbewerbsbeitrag zu *jugend forscht* 2008
und
Seminarkursarbeit zur 5. Prüfungskomponente
Abitur 2008
Hans-und-Hilde-Coppi-Oberschule
Betreuer: Dr. Wolf Bayer

Fraktale Musik

akustische Darstellung des Lorenz-Attraktors



Ulrike Roth
März 2008

Vorbetrachtung

Die Zielstellung meiner Arbeit ist die akustische Darstellung des Lorenz-Systems als Klanggebilde in unterschiedlichen Graden der Komplexität. Die dahinter stehende Frage ist die nach einer anderen als der mathematisch-analytischen Verständnisebene für Fraktale.

Alles, was wir um uns herum wahrnehmen, kann durch mathematische Vorgänge beschrieben werden. Das trifft für Wettererscheinungen ebenso zu wie für Pflanzenwachstum oder Planetenbewegungen. Natürlich sind diese Vorgänge in ihrer Wechselwirkung mit dem Rest des Universums hoch komplex und für uns rational und mathematisch nur isoliert zu verstehen, dennoch sind wir intuitiv in der Lage, mit ihnen jeden Tag umzugehen. Eine Person, der es Schwierigkeiten bereiten kann, $45 + 37/2$ zu berechnen, ist doch in der Lage, die hochkomplexen Kalkulationen vorzunehmen, die erforderlich sind, um einen fliegenden Ball zu fangen. Wenn man dieses Phänomen als Instinkt abtut, hat man es zwar benannt, jedoch nicht erklärt. Es gibt also offensichtlich einen Teil von uns, der die komplexe Mathematik unserer Umwelt versteht und damit umgeht, ohne dass wir diese automatisch ablaufenden Prozesse wahrnehmen.

Wie die Flugbahn des Balles kann man auch die Strukturen von Musik als komplexe mathematische Prozesse darstellen. Musik, welcher Art auch immer, folgt auf verschiedenen Ebenen mathematischen Algorithmen. Würde eine Aufgabe über die Berechnung der Geschwindigkeit und Richtung der Flugbahn eines Balles in einem Physiktest Klasse 9 auftauchen, so würde man mit Formeln und Kräften hantieren, die den Flug des Balles *relativ* genau beschreiben. In der klassischen Musik gibt es solche Formeln ebenfalls in Form von formalen Vorgaben, wie ein Stück aufgebaut sein sollte. Periodizität, Dreiklänge, Tonika – Subdominante – Dominante: solche Folgen bestimmen die Form von klassischer Musik auf der Makroebene. Genau wie die Flugbahn des Balles durch den Physikunterricht in Klasse 9 nur vereinfacht betrachtet wird, lässt sich auch Musik durch Noten nur ungenügend beschreiben. Wie der Ball von bestimmten Windverhältnissen, der Luftdichte und den Turbulenzen durch das Vorbeifliegen eines Vogels beeinflusst wird, so können auch in der Musik Faktoren wie die Unterschiede in den Schwingungen einer alten oder neuen Cellosaite den Klang in seinen Feinheiten manipulieren. Wir nehmen also die Dinge, abhängig von unserem Kenntnisstand, unseren sensorischen Fähigkeiten und unserem Grad von Aufmerksamkeit, mehr oder minder unbewusst wahr und reagieren darauf, verstehen sie intuitiv und interagieren damit.

Wenn man aber die Natur durch komplexe Algorithmen beschreiben kann und Musik ebenfalls als eine Reihe von Zahlen, die bestimmten Gesetzen folgt, darstellbar ist, dann ist die Annahme, dass es eine in der Natur selbst enthaltene Form von Musik geben könnte, zumindest nicht völlig abwegig. Man könnte die Zahlen nehmen, die den Flug einer Schwalbe beschreiben, Frequenz der Flügelschläge, Gewicht, thermodynamische Strömungen etc. und sie in einem Computerprogramm zu Musik zusammenfügen. Dies allerdings ist aufwendig und erfordert eine solche Menge von exakten Daten, dass sich wohl kaum jemand die Mühe machen würde. Eine einfachere Methode wäre es wohl, fraktale Algorithmen, welche die Natur auf erstaunliche Weise beschreiben können, als Grundlage zur Erzeugung von Klanggebilden zu nutzen, also mathematische Mengen musikalisch zu repräsentieren.

An dieser Stelle möchte ich mich herzlich bei Herrn Dr. Bayer bedanken, der mir in seiner Funktion als Betreuer dieser Arbeit geholfen hat, die vielen kleineren und größeren Schwierigkeiten in den Programmen und in diesem Text zu überwinden.

Inhaltsverzeichnis

Vorbetrachtung	I
Inhaltsverzeichnis	II
Einleitung	1
1. Einführung in die theoretischen Grundlagen	
1.1. Ein kurzes Wort zu Fraktalen.....	2
...	3
1.2. Seltsame Attraktoren.....	4
...	7
1.3. Der Lorenz-Attraktor.....	
.....	
1.4. IFS-Fraktale.....	9
	13
2. Akustische Darstellung von Fraktalen	
2.1. Vom seltsamen Attraktor zum Klanggebilde.....	14
...	15
2.2. Alternative Ansätze zu fraktaler Musik.....	16
.....	
Literaturverzeichnis	
Eigenständigkeitserklärung	
Anhang	

Einleitung

Diese schriftliche Arbeit dient einerseits der theoretischen Betrachtung jener Fraktale, die ich in meinen Programmen zum Thema der fraktalen Musik verarbeitet habe, und andererseits zur Erklärung der in den Programmen verwendeten Algorithmen.

Im ersten Teil werde ich auf die theoretischen Grundlagen des Lorenz-Systems eingehen. Dabei werde ich eine kurze Einführung in einige allgemeine Charakteristika von sowohl Fraktalen als auch seltsamen Attraktoren geben. Dann folgt eine etwas detailliertere Betrachtung des Lorenz-Attraktors, welcher als seltsamer Attraktor sowohl fraktale als auch chaotische Eigenschaften aufweist und in drei Programmen auf unterschiedlichen Stufen der Abstraktion akustisch dargestellt wird (Programmnamen siehe Anhang). Ich werde auf seine geometrischen Eigenschaften und auf das physikalische Konzept des Lorenz-Attraktors eingehen, um ein etwas genaueres Verständnis dieses Systems zu ermöglichen.

Da ich mich nicht nur mit dem Lorenz-Attraktor, sondern zusätzlich noch mit einigen IFS-Fraktalen beschäftigt habe, werde ich in diesem Teil auch auf die Möglichkeit der Erzeugung von Fraktalen mittels iterierter Funktionensysteme eingehen und kurz eines der von mir verwendeten IFS-Fraktale vorstellen.

Im zweiten Teil meiner Arbeit werde ich die verschiedenen Stufen der Reduzierung in meinen Programmen und die zugehörigen Algorithmen vorstellen. Hier werden die klangerzeugenden Prozeduren meiner Programme detailliert beschrieben und erklärt.

Schließlich werde ich am Ende noch ein paar alternative Ansätze zur Erzeugung fraktaler Musik aufzeigen, um zu verdeutlichen, dass es in dieser Richtung praktisch uneingeschränkte Möglichkeiten gibt.

1. Einführung in die theoretischen Grundlagen

1.1. Ein kurzes Wort zu Fraktalen

Der Begriff des Fraktals wurde 1975 von Benoît Mandelbrot geprägt. Er leitete ihn von dem lateinische Adjektiv *fractus* (= gebrochen) ab. In der Tat sind Fraktale Gebilde mit einer nicht-ganzzahligen, also gebrochenen Dimension. Wenn man in der euklidischen Geometrie davon ausgeht, dass ein Punkt die Dimension $D=0$ besitzt, eine Linie mit $D=1$ und eine Fläche mit $D=2$ beschrieben werden können, dann besitzt ein Fraktal, wie zum Beispiel die Koch-Kurve mit der fraktalen Dimension $D=1.2619\dots$, eine gebrochene Dimension.

Eine weitere Eigenschaft von Fraktalen ist ihr hohes Maß an Selbstähnlichkeit; in Ausschnitten des Fraktals lässt sich häufig die Gesamtstruktur wiederfinden. Selbstähnlichkeit wiederum ist eine Eigenschaft, die uns auch in der Natur immer wieder begegnet:

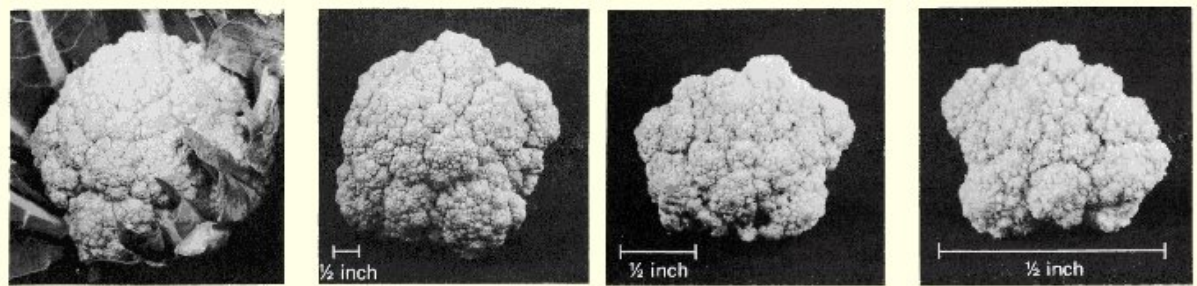


Abb. 0.1.: Natürliche Selbstähnlichkeit bei Blumenkohl

Es existieren drei verschiedene Verfahren zur Erzeugung von fraktalen Strukturen: Lindenmayer-Systeme, Iterierte Funktionensysteme (IFS) und nicht-lineare dynamische Systeme, welche seltsame Attraktoren generieren können. Ich habe bei der Erzeugung fraktaler Musik in meiner Arbeit sowohl auf den Lorenz-Attraktor als seltsamen Attraktor als auch auf verschiedene IFS-Fraktale, die wir im Mathematik-Seminarkurs konstruiert haben, zurückgegriffen. Deshalb werde ich an diesem Punkt kurz auf nicht-lineare, dissipative dynamische Systeme und an einem späteren Punkt auf IFS-Fraktale eingehen. Die L-Systeme werde ich nicht behandeln.

1.2. Seltsame Attraktoren

Erstmalig wurde ein seltsamer Attraktor in seinen Eigenschaften 1962 durch den amerikanischen Meteorologen Edward Lorenz erkannt. Die eigentliche Forschung auf diesem Gebiet begann jedoch erst knapp zehn Jahre später, als 1971 das Konzept des seltsamen Attraktors erstmals in einem Artikel von David Ruelle und Floris Takens formal eingeführt wurde. Damit war es endlich möglich, das chaotische Verhalten in dynamischen Systemen, wie zum Beispiel bei turbulenten Strömungen, das vorher aufgrund seiner Komplexität weitgehend nicht erforscht war, zu analysieren.

Ein seltsamer Attraktor ist die geometrische Darstellung bestimmter Eigenschaften des Verhaltens eines dissipativen, nicht-linearen dynamischen Systems durch die Abbildung seiner wichtigsten Zustandsgrößen im Phasenraum.

Ein System ist dynamisch, wenn es sich zeitabhängig verändert und man nennt es nicht-linear, wenn nicht alle seine Zustandsgrößen in proportionaler Abhängigkeit zu den Ausgangsbedingungen stehen. Es wird als dissipativ bezeichnet, wenn in ihm Reibung eine Rolle spielt. Mit diesen drei Bedingungen kann man feststellen, dass diese Art von Systemen eine nicht unerhebliche Rolle in unserer Umwelt spielt; man findet sie fast überall.

Als Versuch einer Definition von seltsamen Attraktoren als geometrischen Objekten gibt Heinz-Otto Peitgen (Vgl. [1], S.232) die folgenden vier Eigenschaften an:

1. Es gibt einen Gefangenenbereich R , innerhalb dessen alle Anfangswerte Bahnen haben, die gegen den Attraktor A konvergieren.
2. Die Bahnen hängen sensitiv von den Anfangswerten ab. Diese Eigenschaft macht A zu einem chaotischen Attraktor.
3. Der Attraktor hat eine fraktale Struktur; er weist also eine nicht ganzzahlige Dimension auf.
4. A kann nicht in zwei verschiedene Attraktoren aufgespalten werden (was jedoch nicht bedeutet, dass A eine zusammenhängende Menge ist). Es gibt Anfangspunkte in der Gefangenenmenge R , deren Bahnen jedem Punkt im Attraktor beliebig nahe kommen.

Die Darstellung eines Systems als seltsamen Attraktor hat als solche meist keinen direkten geometrischen Bezug zu dem durch sie beschriebenen Prozess, man kann aus ihr jedoch wichtige Aussagen über das Verhalten des Systems unter dem Einfluss bestimmter Parameter treffen. Seltsame Attraktoren spielen also eine große Rolle bei der Analyse von dissipativen dynamischen Systemen, welche wiederum zum Verständnis der verschiedensten Systeme unserer Umwelt – vom planetaren Klima bis zur menschlichen Hirntätigkeit – beitragen könnten.

1.3. Der Lorenz-Attraktor

Edward N. Lorenz wurde 1917 in West Hartford, Connecticut, geboren und forschte ab 1946 am Massachusetts Institute of Technology (MIT) im Gebiet der Meteorologie. In den sechziger Jahren stieß Lorenz bei seiner Arbeit an einem Modell für thermische Konvektion, welches Langzeitwettervorhersagen ermöglichen sollte, auf die Erkenntnis, dass kleinste Veränderungen in den Ausgangsbedingungen starke Abweichungen in Wetterstrukturen hervorrufen können. Er prägte in diesem Zusammenhang den Begriff des Schmetterlingseffekts und beschrieb so als Erster deterministisches Chaos. Er stellte ein relativ einfaches Gleichungssystem aus drei Differentialgleichungen auf, mit dem sich das chaotische Verhalten des Wetters als seltsamer Attraktor darstellen lässt – er entdeckte den Lorenz-Attraktor.

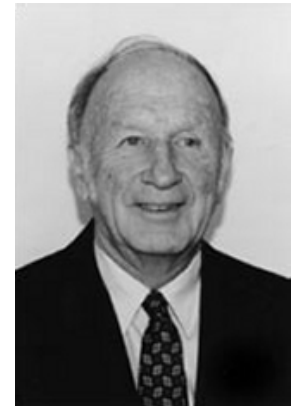


Abb. 1.1.: Edward N. Lorenz

Das Gleichungssystem besteht aus drei relativ simpel anmutenden Differentialgleichungen. Es lautet:

$$x' = \sigma x + y\sigma$$

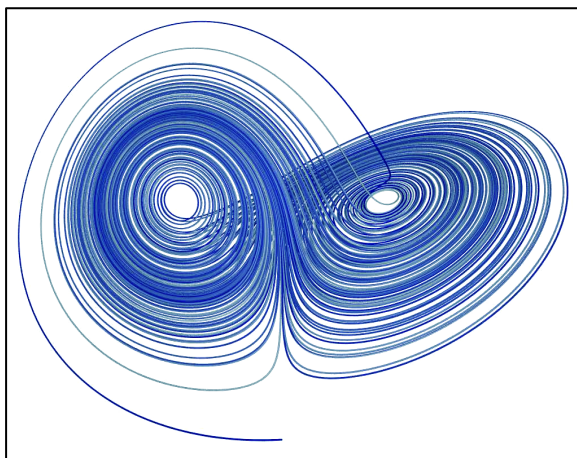
$$y' = Rx - y - xz$$

$$z' = -Bz + xy.$$

Dabei sind σ , R und B konstant.

1.3.1. Geometrische Eigenschaften des Lorenz-Attraktors

Der Lorenz-Attraktor besteht aus zwei flachen, zueinander verdrehten Hälften, in denen Trajektorien spiralförmig nach außen verlaufen. Eine Trajektorie umkreist einen Fixpunkt auf



einer spiralförmigen Bahn, um dann nach einer nicht festgelegten Anzahl von Umdrehungen in die andere Hälfte hinüberzuspringen. Die Anzahl der Umdrehungen in einer Hälfte vor dem Wechsel lässt auch nach langen Simulationen keine Gesetzmäßigkeit erkennen und entspricht einer Zufallskette.

Die Trajektorien auf dem Lorenz-Attraktor kommen sich unendlich nahe, ohne sich zu berühren. Der Lorenz-Attraktor hat nach numerischen Berechnungen eine Dimension von $D \approx 2,06$.

Abb. 1.2.: Einige Trajektorien auf dem Lorenz-Attraktor

1.3.2. Physikalische Grundlagen des Lorenz-Systems

Edward Lorenz entwickelte sein Modell in Anlehnung an einen konkreten physikalischen Vorgang, der die Zustände in der Erdatmosphäre stark beeinflusst: die natürliche Konvektion. Darunter versteht man Teilchenbewegung in strömenden Flüssigkeiten entgegen der Wirkung von stabilisierenden Faktoren, die zum Beispiel auf Temperatur- oder Dichtegradienten zurückzuführen ist. Das Verhalten von Konvektionsströmungen wurde bereits am Anfang des 20. Jahrhunderts durch die Physiker Henri Bénard und Lord Rayleigh sowohl experimentell als auch theoretisch untersucht. Für die experimentelle Arbeit benutzte Bénard Konvektionszellen, in denen sich in sich geschlossene Konvektionsströmungen bilden können.

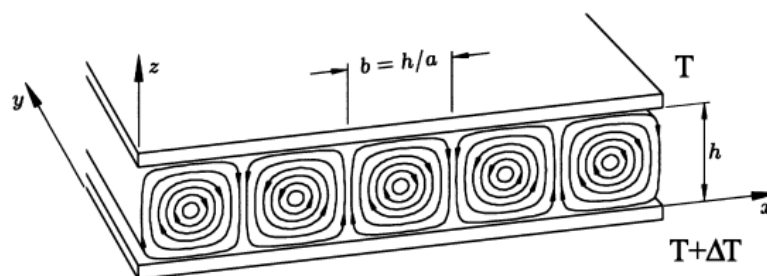


Abb. 1.3.: Konvektionsströme zwischen zwei Platten

In Abbildung 1.3. ist die Bildung sogenannter Konvektionsrollen zu beobachten. Diese bilden sich genau dann, wenn die Temperaturdifferenz $\bar{T}$ zwischen Ober- und Unterseite nicht mehr allein durch Wärmeleitung ausgeglichen werden kann. Es setzt also ab einer gewissen Temperaturdifferenz Flüssigkeitsbewegung ein. Dies ist in der Natur zum Beispiel bei der Frühjahrs- und Herbstzirkulation von Seen zu beobachten, die dort ein bedeutender Faktor für das Leben dieses Ökosystems ist.

Das Lorenz-System basiert auf den Gleichungen der Bénard –Konvektion und auf der Arbeit des amerikanischen Klimatologen Berry Saltzman. Auf eine mathematische Herleitung der Differenzialgleichungen des Lorenz-Systems habe ich an dieser Stelle verzichtet. Zu erwähnen ist jedoch, dass das oben gezeigte Gleichungssystem aufgrund von mehreren Vereinfachungen in der Herleitung den physikalischen Vorgang nur noch sehr bedingt beschreibt und allenfalls für stark begrenzte Parameterwerte noch realistische Ergebnisse liefert.

1.3.3. Gründe für die Nutzung des Lorenz-Attraktors

Ich habe mich aus mehreren Gründen für den Lorenz-Attraktor als Grundlage für meine Versuche auf dem Gebiet der fraktalen Musik entschieden. Ein für mich wichtiges Motiv war seine direkte Beziehung zu einem realen Problem. Anders als IFS-Fraktale, auf die ich später noch zu sprechen kommen werde, sind seltsame Attraktoren Darstellungen von dynamischen Systemen, die in unserer Umwelt existieren und sie zu einem großen Teil bestimmen. Natürlich ist die mathematische Darstellung meist stark abstrahiert und vereinfacht, dennoch sind es nicht nur theoretische Gebilde; sie haben einen direkten Bezug zur Realität unserer Umgebung. So wurde der Lorenz-Attraktor im Gegensatz zum Rössler-System nicht künstlich um seiner mathematischen Eigenschaften willen erdacht, sondern aus einem physikalischen Modell abgeleitet. Das Lorenz-System ist als erster bekannter seltsamer Attraktor eines der

bekannteren Beispiele für Fraktale und Chaos. Meiner Meinung nach besitzt sein Attraktor außerdem durchaus einen ästhetischen Reiz.

1.4. Fraktale Musik aus IFS-Fraktalen

Meine Arbeit enthält mehrere Beispiele fraktaler Musik, die auf einer anderen Art von Fraktalen als den seltsamen Attraktoren basiert - den IFS-Fraktalen. IFS (Iterated Function System) ist eine mathematische Methode, mittels derer Fraktale durch das wiederholte Ausführen von Algorithmen, also durch Iterationen, konstruiert werden können. Das entstehende IFS-Fraktal besteht aus Kopien seiner selbst, die durch die wiederholte Anwendung des Algorithmus eine bestimmte Form und Position einnehmen. Dabei spielen sowohl der Zufall als auch der Attraktor in einem IFS eine große Rolle: Die Punkte des Fraktals werden in einer Iterationsfolge mit zufälligem Verhalten um die Fixpunkte des IFS verteilt, jedoch wird kein Punkt außerhalb des Attraktionsbereiches gesetzt, wenn die Folge einmal darin gefangen ist.

1.4.1. Wichtige Begriffe im Zusammenhang mit IFS-Fraktalen

Kontraktion¹

Kontraktionen oder kontrahierende Abbildungen sind Abbildungen bzw. Funktionen, deren Funktionswerte y_1 und y_2 einen kleineren Abstand haben, als die zugehörigen x -Werte x_1 und x_2 .

Ein Kriterium für Kontraktion gibt die Summennorm für die Matrix einer affinen Abbildung:

Gilt $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 < 2$, so ist die affine Abbildung F definiert durch

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \quad \text{Kontraktion.}$$

Iterations-Folge²

Es wird in einer Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^2$ mit einer Funktion $F: M \rightarrow M$ eine Iterationsfolge erzeugt.

Es wird ein Startwert $\vec{z}_0 \in M$ gewählt und auf diesen die Abbildung F angewandt. Wird auf den so erzeugten Bildpunkt $\vec{z}_1 := F(\vec{z}_0)$ erneut F angewandt, so erhält man den Bildpunkt $\vec{z}_2 := F(\vec{z}_1) = F(F(\vec{z}_0))$. Setzt man dies beliebig lange fort, so erhält man die Iterations-Folge von Vektoren $(\vec{z}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, welche in $\mathbb{R}^2$ eine Punktwolke erzeugt. D.h. wir definieren induktiv mit $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, $\vec{z}_{n+1} := F(\vec{z}_n)$.

Selbstähnliche Abbildungen³

Manche affine Abbildungen sind selbstähnlich. Die Klasse der selbstähnlichen Abbildungen umfasst Identität, Verschiebungen, Drehungen, Dehnungen und Spiegelungen, also nur Abbildungen, welche Bilder erzeugen, deren Winkel und Seitenverhältnisse ihren Urbildern gleichen. Für Selbstähnlichkeit gilt folgendes Kriterium:

Gilt $a=d$ und $c=-b$ oder $a=-d$ und $c=b$, so ist die affine Abbildung F definiert durch

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} \text{ selbstähnlich.}$$

Jede Komposition von selbstähnlichen Abbildungen ist selbstähnlich.

1.4.2/1.4.3 Erzeugung von IFS-Fraktalen

Ein IFS-Algorithmus wird durch drei oder mehr affine Abbildungen in einer Iterationsfolge $(x_n; y_n)$, $n \in \mathbb{N}$ mit dem Startpunkt $(x_0; y_0)$ erzeugt, bei der bei jeder Iteration eine der Abbildungen per Zufall ausgewählt wird. Die verschiedenen Abbildungen weisen, wenn sie Kontraktion sind, nach dem Banach'schen Fixpunktsatz jeweils genau einen Fixpunkt auf, gegen den jede einzelne Iterationsfolge konvergieren würde. Da sich von einem Schritt zum nächsten die verwendete Abbildung und damit der anziehende Fixpunkt ändern kann, aber nicht muss, zeigt die Iterations-Folge ein chaotisches Verhalten. Trotzdem existiert ein Attraktor, eine kompakte Menge, die einem Fraktal entspricht, und welche die Iterations-Folge, sobald sie einmal darin ist, nie mehr verlässt. So stellt der Attraktor gewissermaßen den Limes der Iterationsfolge dar, obwohl er unendlich viele Punkte enthält.

1.4.3. Ein Beispiel: Der Weihnachtsbaum

Ich möchte an dieser Stelle eines der IFS-Fraktale, welches ich in dem Programm *Weihnachtsbaum.pas* verwendet habe, vorstellen. Der Weihnachtsbaum ist im Rahmen des Mathematik-Seminarkurses bei einer Partnerarbeit entstanden und wurde von Nora Kind und mir selbst konstruiert. An ihm kann man die Eigenschaften der Selbstähnlichkeit und der Kontraktion sehr gut verdeutlichen; außerdem ist er in seiner akustischen Darstellung aufgrund der großen Punktdichte im Bereich des „Stammes“ recht charakteristisch.

Die Konstruktionsvorschrift

Dieses IFS-Fraktal entsteht durch die Kombination von drei affinen Abbildungen, von denen im Programm in jedem Iterationsschritt durch die Prozedur „würfeln“ zufällig eine ausgewählt wird. Die affinen Abbildungen haben folgende Werte:

$$F_1\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0 \\ 0 & 0,6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$F_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0,6 \\ 0,6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Abbildung F_1 bewirkt eine Kontraktion mit dem Faktor $s = 0,6$ und eine Verschiebung auf der y -Achse um $0,5$ in positiver Richtung.

Die Abbildung F_2 bewirkt eine Kontraktion mit dem Faktor $s = 0,6$ und eine Drehung um 90° .

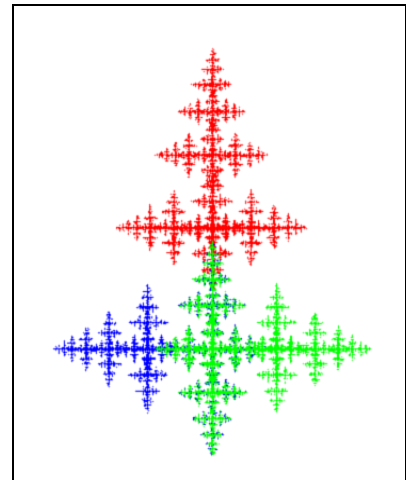


Abb. 1.4: IFS- Fraktal „Weihnachtsbaum“

$$F_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0,6 \\ -0,6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Die Abbildung F_3 bewirkt eine Kontraktion mit dem Faktor $s = 0,6$ und eine Drehung um 270° .

Die aus den einzelnen Abbildungen entstandenen Teile des Weihnachtsbaumes sind in Abb. 1.4. farblich voneinander abgehoben (F_1 : Rot; F_2 : Blau; F_3 : Grün).

Selbstähnlichkeit

Alle drei Abbildungen sind nach dem schon genannten Selbstähnlichkeitskriterium selbstähnlich:

- F_1 : $a = d = 0,6$ und $b = -c = 0$.
- F_2 : $a = d = 0$ und $-b = c = 0,6$.
- F_3 : $a = d = 0$ und $b = -c = 0,6$.

Kontraktion

Nach dem schon genannten Summenkriterium sind alle drei Abbildungen Kontraktionen:

- F_1 : $(0,6)^2 + 0^2 + 0^2 + (0,6)^2 = 0,72 < 2$
- F_2 : $0^2 + (-0,6)^2 + (0,6)^2 + 0^2 = 0,72 < 2$
- F_3 : $0^2 + (0,6)^2 + (-0,6)^2 + 0^2 = 0,72 < 2$

Dimension

Da die drei Teile des Weihnachtsbaumes, wie in Abb. 1.4. erkennbar, überlappend sind, kann die fraktale Dimension hier nicht mit der Formel von Hutchinson bestimmt werden.

2. Akustische Darstellung von Fraktalen

2.1. Vom seltsamen Attraktor zum Klanggebilde

Ich habe in meiner Arbeit auf eine recht einfache Methode zu Erzeugung von fraktaler Musik zurückgegriffen. Im ersten Teil meiner Arbeit habe ich dazu den Lorenz-Attraktor als Grundlage genommen. Ich habe die durch das Gleichungssystem des Lorenz-Attraktors errechneten Werte für die x-Koordinate mittels linearer Transformation in den positiven Bereich verschoben und durch Vervielfachung in den für uns hörbaren Frequenzbereich verlegt. Außerdem habe ich den Abstand zwischen den einzelnen Punkten (im Programm: *delta*) so gewählt, dass die einzelnen Töne voneinander unterscheidbar sind. Auf diese Weise entsteht ein äußerst komplexes Klanggebilde, welches direkt im Bezug zu der grafischen Darstellung des Lorenz-Attraktors steht. In meinem Empfinden war diese Tonfolge jedoch so komplex, unverständlich und wenig ansprechend, dass ich beschloss, sie zu vereinfachen.

2.1.1. Reduzierung auf wohltemperierte Töne

Ob wir Musik als harmonisch oder dissonant empfinden, hängt zum Teil von unseren Hörgewohnheiten und unserer musikalischen Prägung ab. Die traditionelle Musik des europäischen Kulturraums ist in vielen Bereichen polyphon. Damit aber zwei oder mehrere Töne für unser Musikverständnis harmonisch zusammen klingen, müssen ihre Frequenzen in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander stehen. Um diesen Ansprüchen gerecht zu werden, müssen Instrumente in sich selbst und bei mehrstimmigen Stücken aufeinander gestimmt werden. In der Musik hat es zu verschiedenen Zeiten unterschiedliche Stimmungen gegeben. Seit Johann Sebastian Bach aber im 18. Jahrhundert das wohltemperierte Klavier entwickelte, hat sich die wohltemperierte Stimmung sukzessive durchgesetzt.

Im Versuch, die von mir generierte akustische Darstellung des Lorenz-Attraktors hörbarer oder zumindest einfacher verständlich zu gestalten, habe ich die x-Werte, anstatt sie einfach nur in den für uns hörbaren Frequenzbereich abzubilden und abzuspielen, auf die Frequenzen wohltemperierter Töne eines bestimmten Bereiches reduziert. Diese Reduzierung ist natürlich auch eine Verfälschung der Darstellung, andererseits ist es uns durch unsere musikalische Sozialisation kaum möglich, die Frequenzdifferenzen, die kleiner als die von Halb- oder Vierteltonschritten sind, zu hören und zu verstehen. Deshalb ist die durch die Reduzierung verursachte abweichende Repräsentation des Fraktals zu Gunsten der Verständlichkeit meiner Meinung nach vertretbar.

Mathematische Herangehensweise

Die durch das Gleichungssystem des Lorenz-Attraktors errechneten Punkte sind Elemente des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^3$, ihre x-Werte sind in einem Intervall $[a, b]$. Sie sollen in die diskrete Menge der wohltemperierten Töne abgebildet werden.

Voraussetzungen

In der chromatischen Tonleiter ist eine Oktave in zwölf Intervalle mit jeweils gleichen Frequenzverhältnissen unterteilt. Man kann dies am Beispiel der C-Dur Tonleiter veranschaulichen:

$$\frac{\text{Frequenz}(C_2)}{\text{Frequenz}(H_1)} = \frac{\text{Frequenz}(H_1)}{\text{Frequenz}(B_1)} = \frac{\text{Frequenz}(B_1)}{\text{Frequenz}(A_1)} = \dots = \frac{\text{Frequenz}(Cis_1)}{\text{Frequenz}(C_1)} = k$$

Nach Einsetzen der entsprechenden Werte für C_1 und Cis_1 ergibt sich folgender Wert für k :

$$\frac{65,4064\text{Hz}}{61,7354\text{Hz}} \approx 1,0595 \approx \sqrt[12]{2} = k.$$

Mithilfe der Konstanten k kann man nun die Frequenzen aller Töne in Abhängigkeit von einem Ausgangston darstellen. Ausgangspunkt ist der Kammerton A, welcher eine Frequenz von 440Hz hat.

Für die Frequenz f eines beliebigen Tones gilt:

$f = 440k^i$ mit $i \in \mathbb{R}$. Die Frequenzen beliebiger Töne sind also Elemente der Menge $F := \{f \in \mathbb{R}^+ / f = 440k^i, i \in \mathbb{R}\}$.

Für die Frequenz w irgendeines wohltemperierten Tones gilt:

$w = 440k^i$ mit $i \in \mathbb{Z}$. Die Frequenzen der wohltemperierten Töne sind also Elemente der Menge $W := \{w \in \mathbb{R}^+ / w = 440k^i, i \in \mathbb{Z}\}$.

Umsetzung

Folgende Schritte sollen stattfinden:

- 1.) Für einen ankommenden x-Wert des Lorenz-Attraktors wird die Differenz d zum Kammerton A bestimmt und die der Differenz d entsprechende Anzahl von Halbtonschritten i berechnet; $d \in [a, b]$, $i \in \mathbb{R}$.
- 2.) Der Wert für i wird durch die Funktion *round* auf eine ganze Zahl $i \in \mathbb{Z}$ gerundet.
- 3.) Mittels des gerundeten $i \in \mathbb{Z}$ wird nun die Frequenz w des wohltemperierten Tones berechnet, welcher dem ursprünglichen x-Wert zugeordnet wird.

Ausgangspunkt ist folgende Gleichung:

$$y = 440 \cdot k^i \text{ mit } y \in \mathbb{R} \text{ und } -40 \leq i \leq 40$$

$$k \dots \text{Quotient zweier Halbtonschritte} \hat{=} \sqrt[12]{2} = e^{\frac{1}{12} \ln 2} \quad (\text{im Programm: gamma})$$

$y \dots$ Frequenz eines beliebigen wohltemperierten Tones

$i \dots$ Anzahl der Halbtonschritte zwischen y und dem Kammerton A

Diese Gleichung kann man nun nach i auflösen:

$$y = 440 \cdot k^i \Leftrightarrow \frac{y}{440} = k^i \Leftrightarrow \frac{y}{440} = e^{\frac{i}{12} \ln 2} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y}{440}\right) = \frac{i}{12} \ln 2 \Leftrightarrow i = \frac{12 \cdot \ln\left(\frac{y}{440}\right)}{\ln 2}$$

$$\Leftrightarrow i = \frac{12(\ln y - \ln 440)}{\ln 2}$$

- 1.) Wenn man nun in dieser Gleichung statt für y die Frequenz eines wohltemperierten Tones anzunehmen, jedes beliebige x aus dem Lorenz-Attraktor zulässt, kann man für jeden ankommenden x -Wert mittels der folgenden Gleichung die Anzahl der Halbtonschritte, die der entsprechende Ton vom Kammerton A entfernt ist, berechnen.
Da der ankommende x -Wert hier auch negativ sein kann, wird durch eine Verschiebung um 20 Einheiten in positiver Richtung sichergestellt, dass der $\ln$ ein positives Argument enthält.

Die Gleichung lautet also:

$$i = 12 \cdot \frac{\ln(x + 20) - \ln 440}{\ln 2}$$

- 2.) Für diese Gleichung gilt $i \in \mathbb{R}$. Da bei wohltemperierten Tönen jedoch $i \in \mathbb{Z}$ gelten muss, wird i folgendermaßen auf eine ganze Zahl gerundet:

$$i := \text{round}\left(12 \cdot \frac{\ln(x + 20) - \ln 440}{\ln 2}\right)$$

- 3.) Das so berechnete i wird nun wieder in die Ausgangsgleichung eingesetzt, um die Frequenz w des wohltemperierten Tones, der dem ankommenden x -Wert zugeordnet wird, zu berechnen.

$$w := 440 k^i = 440 \cdot e^{i \ln k}$$

w ...Frequenz des x zugeordneten wohltemperierten Tones
(hz)

(im Programm:

Aus technischen Gründen habe ich hier nicht, wie in den Gleichungen bisher, den Kammerton A als Grundton genommen, da die spezifischen Frequenzen in meinem Programm dadurch in einer unangenehmen Lage abgebildet werden. Stattdessen habe ich das A_2 , welches zwei Oktaven tiefer liegt, als Grundton gewählt (A_2 hat eine Frequenz von 110Hz).

Die letztendlich im Programm verwendete Gleichung lautet also

$$w := 110 \cdot e^{i \ln k}.$$

Das Element w wird mit dem Frequenzerzeuger *sound* hörbar gemacht und es erklingt ein wohltemperierter Ton. Nun kann man in meinem Programm durch den Lorenz-Attraktor wandern und jeden Punkt in der wohltemperierten Stimmung erklingen lassen.

2.1.2. Reduzierung auf Dur

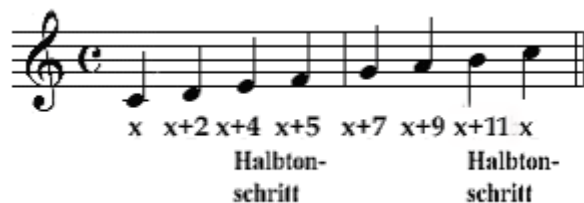
Nach der Reduzierung auf wohltemperierte Töne habe ich noch eine weitere Vereinfachung vorgenommen, um mein „Stück“ für unser auf Harmonie geprägtes Gehör angenehmer zu gestalten. Diese Simplifizierung führt natürlich auch zu einer größeren Entfremdung von der ursprünglichen Darstellung, jedoch ging es mir bei diesem Schritt auch mehr um das Potenzial von fraktaler Musik als Kunstform als um die konkrete akustische Darstellung des Attraktors.

Mathematische Herangehensweise

Man geht von der durch die Reduzierung auf wohltemperierte Töne erzeugten chromatischen Tonleiter aus. Hier existieren 12 Töne pro Oktave und die Töne sind jeweils einen Halbton voneinander entfernt.



Jede Dur-Tonleiter besteht aber aus nur acht Tönen mit einer spezifischen Abfolge von Halb- und Ganztonschritten: Vom dritten zum vierten Ton und vom siebten zum achten Ton erfolgt ein Halbtonschritt. Die Reduzierung von wohltemperierten Tönen auf Dur erfolgt nun durch eine einfache Ausschlussprozedur. Aus der Menge der 12 chromatischen Töne werden nun jene herausgefiltert, welche nicht zur Dur-Tonleiter gehören.



Alle Töne der Tonleiter werden also in Abhängigkeit vom Grundton (hier: C) angegeben. Die jeweilige Entfernung vom Grundton wird in Halbtonschritten angegeben. Im Programm wird einfach durch das Einfügen einer Bedingung für i folgendermaßen aussortiert:

```
i = round ((12*ln(x+20)-ln(440))/ln(2))
IF ((i+24) MOD 12) IN [0, 2, 4, 5, 7, 9, 11]
THEN BEGIN
    hz = 110*exp(i*ln(gamma))
    sound(hz)
```

Für hz werden also nur die i zugelassen, die in einem Zwölferintervall an Stelle 0, 2, 4, 5, 7, 9 oder 11 stehen. Die restlichen Töne werden nicht gerundet, sondern ausgelassen.

Wie man im Programm *Lorenz3.pas* hören kann, ist nach dieser Reduzierung der Abstand zum Original schon beträchtlich. Dafür klingt der Attraktor jetzt sehr harmonisch und ist musikalisch viel leichter zu erfassen.

2.1.3. Musik aus IFS-Fraktalen

In den Programmen *Weihnachtsbaum.pas*, *Kleeblatt.pas* und *Random.pas* habe ich drei Klangbeispiele für eine andere Art von Fraktalen in meine Arbeit aufgenommen. Dafür habe ich jedoch den Algorithmus nicht großartig verändert; es wurden lediglich ein paar individuelle Anpassungen für die sich vom Lorenz-Attraktor unterscheidende Bandbreite der Werte vorgenommen. Dies betrifft die im Lorenz-Programm vorgenommene Verschiebung, die hier nicht notwendig ist, da keine negativen Werte existieren, und die Berechnung des Delays (in *Weihnachtsbaum.pas* wurde das Delay in Abhängigkeit der y-Koordinate berechnet). Ansonsten dienen die Beispiele für IFS-Fraktale nur der Illustration der Bandbreite und Möglichkeiten fraktaler Musik.

2.3. Alternative Ansätze zu fraktaler Musik

Ich habe in meiner Arbeit nur einen von mannigfaltigen Wegen zur Erzeugung fraktaler Musik genutzt. Der Lorenz-Attraktor allein wäre Material genug, um Tausende von verschiedenen „Stücken“ zu generieren. Ich möchte an dieser Stelle auf einige alternative Varianten eingehen, um die Vielfalt der Möglichkeiten fraktaler Musik zu demonstrieren.

Die erste Entscheidung bei der akustischen Darstellung von Fraktalen ist: Von welchen Eigenschaften oder Parametern des Fraktals mache ich die des Klanggebildes abhängig? Anstatt die errechneten x-Werte zu verarbeiten, könnte man zum Beispiel die Differenzen der Ergebnisse der einzelnen Werte zu einem bestimmten Zeitpunkt bei laufenden Parameterwerten für σ , B und R nutzen, um somit die sensitive Abhängigkeit der Ergebnisse von den Parameterwerten als Grundlage für die akustische Darstellung zu wählen. Eine andere Variante wäre es, jeder Trajektorie in den beiden Spiralen des Lorenz-Systems nach seinem Abstand zum Fixpunkt eine Frequenz zuzuordnen... die Möglichkeiten sind äußerst vielfältig.

Beim nächsten Schritt geht es darum, wie man die aus den verschiedenen geometrischen Eigenschaften abgeleiteten Tonfolgen weiter verarbeitet und welche musikalischen Parameter man an sie knüpft. Denn obwohl ich mich in meinen Programmen hauptsächlich auf die Komponente der Tonfolge und ihrer Abhängigkeit von den x-Werten befasset habe, gibt es auch eine ganze Reihe anderer musikalischer Parameter wie Tonart, Takt, Dynamik, Instrumentalität etc. die man in einem wesentlich umfänglicheren Projekt ebenfalls mit einbeziehen könnte. Außerdem wäre es natürlich möglich und, denke ich, sehr interessant, fraktale Musik auch polyphon zu gestalten. Bei jeder Änderung der Belegung der einzelnen Parameter wird ein komplett neues Stück erzeugt.

Ich habe mich in meiner Arbeit außerdem mit dem Problem der Verständlichkeit von fraktaler Musik beschäftigt. Ich bin sicher, dass fraktale Musik in bestimmter Form äußerst angenehme Klänge und Harmonien erzeugen kann, jedoch ist dies nicht automatisch der Fall. Ich habe in zwei Reduzierungen der für mein Programm zugelassenen Frequenzen versucht, die akustische Darstellung des Lorenz-Attraktors für unsere Hörgewohnheiten etwas angenehmer zu gestalten, jedoch habe ich mich in dieser Hinsicht sehr beschränkt, um die ursprüngliche Abhängigkeit des Klanggebildes von seiner mathematischen Grundlage nicht zu sehr zu untergraben. Von einem rein künstlerisch-ästhetischem Standpunkt aus würde dies jedoch keine Rolle spielen. Anstatt fraktale Algorithmen als Ausgangspunkt für ein Musikstück zu nehmen, könnte man zum Beispiel eine bestehende Komposition auf der Basis fraktaler Algorithmen variieren. Oder man könnte die zugelassenen Frequenzen nicht nur auf eine Tonart sondern auf bestimmte musikalische Funktionen und Akkorde beschränken, um ein harmonisches Stück zu generieren.

Die beschriebenen Ansätze sind nur ein kleiner Ausschnitt aus der gewaltigen Menge der Möglichkeiten, Fraktale mittels Klängen zu verarbeiten. Sie illustrieren jedoch das Potenzial von Fraktalen als mögliche Inspirationsquelle für eine enorme Anzahl verschiedener Stücke. So wie die Mandelbrotmenge einen unendlichen Speicher an Mustern und Bildern darstellt, ist jedes Fraktal auch ein Speicher von äußerst diversen Klanggebilden, die man aus ihm ableiten kann. Die Frage, ob fraktale Musik tatsächlich als Kunst anzuerkennen ist oder ob man sie zum Kaffeetrinken auflegen würde, bleibt aber wohl jeder/m selbst überlassen.

Literaturverzeichnis

Bücher

- [1] Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D.: *Bausteine des Chaos – FRAKTALE*
Klett-Cotta/Springer Verlag (1992)
- [2] Peitgen, H.-O., Jürgens, H., Saupe, D.: *CHAOS – Bausteine der Ordnung*
Klett-Cotta/Springer Verlag (1993)

Artikel

- [3] Bayer, W., Witten, H.: *Algorithmen der fraktalen Geometrie III – IFS-Fraktale*
September 2006
- [4] Szabo, F.: *Fraktale in der Wissenschaft und im täglichen Leben*
Oktober 1993
Bereitgestellt unter: <http://franzszabo.fastmail.fm/fachartikel/fraktale.html>
- [5] Jönck, U., Prill, F.: *Das Lorenz-System: Seminar über gewöhnliche Differentialgleichungen*
Februar 2003
Bereitgestellt unter: <http://www.tu-harburg.de/~sufp/Seminar/index.html>

Bildquellen

- [I] Deckblatt: Warwick Mathematics Institute
Bereitgestellt unter <http://www.tjsullivan.org.uk/>
- [II] Abb. 0.1: Aus [1], Abb. 2.1.
- [III] Abb. 1.1: American Institute of Physics
Bereitgestellt unter http://photos.aip.org/history/Thumbnails/lorenz_edward_a1.jpg

[IV] Abb. 1.2:

Bereitgestellt unter http://www.igi.tugraz.at/legi/lorenz_attractor.jpg

[V] Abb. 1.3: Aus [5], Abb. 1.4.

[VI] Abb. 1.4: Nora Kind und Ulrike Roth, Seminarkursarbeit zu IFS-Fraktalen

Eigenständigkeitserklärung

Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Seminararbeit mit dem Titel *Fraktale Musik – akustische Präsentation des Lorenz-Attraktors* selbstständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen, die anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinn nach entnommen wurden, habe ich in jedem einzelnen Fall durch die Angabe der Quelle, auch der benutzten Sekundärliteratur, als Entlehnung kenntlich gemacht.

Anhang

Beiliegend zu dieser Arbeit finden sie eine CD-ROM mit den unterschiedlichen Versionen meines Programms. Im Ordner *Lorenz* befinden sich die drei Versionen der akustischen Darstellung des Lorenz-Attraktors:

Lorenz1.pas: Darstellung des Lorenz-Attraktors ohne größere Reduzierung.

Lorenz2.pas: Darstellung des Attraktors in wohltemperierten Tönen.

Lorenz3.pas: Darstellung des Attraktors in A-Dur.

Außerdem befindet sich hier noch eine vierte Version namens Lorenz21.pas. Sie ist ein zweites Klangbeispiel für die auf wohltemperierte Töne reduzierte Variante mit geringeren Tonabständen.

Im Ordner *IFS* befinden sich drei Beispiele für fraktale Musik aus IFS-Fraktalen:

Weihnachtsbaum.pas: Darstellung des vorgestellten IFS-Fraktals Weihnachtsbaum.

Kleeblatt.pas und Random.pas: Zwei weitere Beispiele fraktaler Musik aus IFS-Fraktalen.

Ich habe außerdem von jedem der oben erwähnten Programme eine Datei im *exe*-Format beigefügt, da ich weiß, dass Turbo Pascal eher veraltet ist und nicht auf allen PCs läuft. Leider ist es hier nicht möglich, den Programmcode einzusehen, weswegen ich noch eine Datei im *txt*-Format mit dem Programmcode beigefügt habe. In Verbindung mit den *exe*-Dateien sollten die Programme so auch ohne Turbo-Pascal einsehbar sein.. Die *exe*- und *txt*-Dateien befinden sich in den Ordnern ihrer jeweiligen Pascal-Äquivalente.